



NORMLU UZAYLARDA DOĞRUSAL OPERATÖRLER



Gülnur Serap YILDIRIM

Danışman: Prof. Dr. Ömer GÖK

Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, İstanbul

Özet

Lineer operatörler matematiksel problemlerin ifade edilmesinde kullanılır ve genellikle çözülecek denklemlere veya optimize edilecek fonksiyonlara yol açar. Bir matematik probleminin teorik olarak çözülebilirliğini incelemek ve çözümünü için sayısal yöntemler geliştirmek adına problemimize dahil olan operatörler hakkında ek özellikler bilmemiz gerekir.

Bu çalışmada Normlu Uzaylarda Lineer Operatörlere ait teoremlere, tanımlara ve örneklere yer verilmiştir.

Tanım ve Teoremler

Teorem 3.11

E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. $BoyE < \infty$ ise T sınırlıdır.

Teorem 3.12

E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ örten doğrusal bir operatör olsun. T^{-1} 'in mevcut ve sınırlı olması ancak her $x \in E$ için $m \|x\| \leq \|Tx\|$ olacak şekilde bir $m > 0$ değerinin mevcut olmasıyla mümkündür.

Teorem 3.13

E sonlu boyutlu bir normlu uzay ve $F \subset E$ olsun. F 'nin kompakt olması ancak ve ancak F kapalı ve sınırlı ise mümkündür.

Teorem 3.13

E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ lineer bir operatör olsun. Aşağıdakiler denktir.

- 1) $T, x_0 \in E$ 'de süreklidir.
- 2) T her yerde süreklidir.
- 3) T sınırlıdır.

Teorem 3.15

E bir normlu uzay; G, E 'nin bir alt uzayı ve F de bir Banach uzayı olsun. $T: G \rightarrow F$ lineer sınırlı bir operatör olsun. O halde tek bir biçimde tanımlı $S: \bar{G} \rightarrow F$ sınırlı lineer operatörü vardır ki her $x \in G$ için $Sx = Tx$ ve $\|S\| = \|T\|$ sağlanır. Yani S operatörü, T operatörünün genişlemesidir.

Riesz Yardımcı Özelliği 3.15.1

E , normlu bir uzay ve F, E 'nin kapalı bir öz alt uzayı olsun. O zaman her $0 < \theta < 1$ ve her $y \in F$ için $\|z - y\| = \theta \|y\|$ eşitsizliğini sağlayan bir $z \in E, \|z\| = 1$ vektörü mevcuttur.

Sonuçlar

Bu çalışmada, normlu uzaylar üzerinde lineer operatörler konusu anlatılmış, ilgili temel kavramların ardından lineer operatörler başlığı altında teoremler verilmiştir.

Lineer operatörler, uygulamalı matematiğin problemlerinin çözülmesinde rol oynar. Bu gibi problemleri çözmek amacıyla geliştirilen yöntemlerle probleme dahil olan lineer operatörlerle ilgili ispatlar, teoremlerin ve tanımların ardından verilmiştir.

Tanım ve Teoremler

Tanım 3.1 (Lineer Operatör)

E ve F vektör uzayları, $T: E \rightarrow F$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın.

1. Her $x, y \in E$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
2. Her $x \in E$ ve $a \in K$ için $T(ax) = aT(x)$.

Bu durumda T dönüşümüne bir lineer operatör denir.

Tanım 3.3 (Sınırlı Operatör)

E, F normlu uzaylar ve $T: E \rightarrow F$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in E$ için

$$\|Tx\| \leq M \|x\|$$

Eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı mevcutsa T lineer operatörüne sınırlı adı verilir.

Önerme 3.7

E, F, G normlu uzaylar ve $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ve $S \in \mathcal{L}(F, G)$ olsun. $ST \in \mathcal{L}(E, G)$ ve

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$$

Tanım 3.8

E ve F normlu uzaylar olsun. $T: E \rightarrow F$ dönüşümü lineer sürekli, birebir, örten ve her $x \in E$ için

$$\|Tx\| = \|x\|$$

Oluysa T dönüşümüne bir örten izometri ve E ile F uzaylarına da izomorfik olarak izometrik uzaylar adı verilir.

KAYNAKÇA

1. Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson, "Linear Functional Analysis", 2008
2. Ömer Gök, Fonksiyonel Analize Giriş, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1996
3. https://www.researchgate.net/publication/225910226_Linear_Operators_on_Normed_Spaces
4. <https://ocw.metu.edu.tr/pluginfile.php/3733/course/section/2487/D12.pdf>